**Uitwerking tentamen algebra I, maandag 4 februari 2008.**

**opgave 1:** Zij $G$ een eindige groep en zij $S_n$ de permutatiegroep op $n$ elementen. Zij $\varphi: \ G \longrightarrow S_n$ een surjectief groepshomomorfisme voor zekere $n \geq 2$, zodat de kern van $\varphi$ precies $n+1$ elementen bevat.

a) Bepaal het aantal elementen van de groep $G$.

b) Bewijs dat $G$ een normaaldeler van index twee bevat.

c) Bewijs dat er een surjectief groepshomomorfisme bestaat van $G$ naar $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**oplossing: a)** Er geldt $G/Ker(\varphi) \cong \varphi(G)$. Met de stelling van Lagrange volgt hieruit dat $\sharp G = \sharp\varphi(G) \cdot \sharp Ker(\varphi)$. Gegeven is dat $\varphi$ surjectief is. Daaruit volgt dat $\varphi(G) \cong S_n$. Er geldt dan dat $\sharp\varphi(G) = \sharp S_n = n!$. Er is gegeven dat $\sharp Ker(\varphi) = n+1$. Dan is $\sharp G = \sharp\varphi(G) \cdot \sharp Ker(\varphi) = n! \cdot (n+1) = (n+1)!$.

**b)** De alternerende groep $A_n$ is een normaaldeler van $S_n$ met index 2. Dan is het volledig origineel $\varphi^{-1}(A_n)$ een normaaldeler van $G$. Omdat $\varphi$ surjectief is volgt dat de index van $\varphi^{-1}(A_n)$ in $G$ gelijk 2 is.

**c)** Het teken $\epsilon : S_n \longrightarrow \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is een groepshomomorfisme. Dan is ook de samenstelling $\epsilon \circ \varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ een groepshomomorfisme. Omdat zowel $\epsilon$ als $\varphi$ surjektief zijn, is ook de samenstelling $\epsilon \circ \varphi$ surjektief.

**opgave 2:** Zij $G$ een groep en laten $N_1$ en $N_2$ twee normaaldelers van $G$ zijn.

a) Bewijs dat de afbeelding $\varphi : G \longrightarrow G/N_1 \times G/N_2$ gegeven door $\varphi(g) = (gN_1, gN_2)$ een groepshomomorfisme is.

b) Bepaal de kern van de afbeelding $\varphi$.

c) Neem aan dat $[G : N_1] = [G : N_2] = 2$ en dat $N_1 \neq N_2$. Bewijs dat de groep $G$ een derde normaaldeler $N_3 \neq N_1, N_2$ met index $[G : N_3] = 2$ bevat.

**oplossing: a)** We moeten aantonen dat $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ geldt. Er geldt dat $\varphi(g_1g_2) = (g_1g_2N_1, g_1g_2N_2)$. In de faktorgroep $G/N_1$ geldt per definitie dat $g_1g_2N_1 = g_1N_1 \cdot g_2N_1$. In $G/N_2$ geldt dan $g_1g_2N_2 = g_1N_2 \cdot g_2N_2$. Daaruit volgt dat $(g_1g_2N_1, g_1g_2N_2) = (g_1N_1 \cdot g_2N_1, g_1N_2 \cdot g_2N_2)$. De groepswet voor een direct product van groepen geeft dat $(g_1N_1 \cdot g_2N_1, g_1N_2 \cdot g_2N_2) = (g_1N_1, g_1N_2) \cdot (g_2N_1, g_2N_2)$. De laatste uitdrukking is weer gelijk aan $\varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$. Daaruit volgt dat $\varphi$ inderdaad een groepshomomorfisme is.

**b)** Het eenheidselement van de groep $G/N_1 \times G/N_2$ is het element $(eN_1, eN_2)$, waarbij $e$ het eenheidselement van $G$ is. Er geldt $g \in Ker(\varphi)$ dan en slechts dan als $\varphi(g) = (gN_1, gN_2) = (eN_1, eN_2)$. Dit is gelijkwaardig met $gN_1 = eN_1$ en $gN_2 = eN_2$. Oftewel $g \in N_1$ en $g \in N_2$. Daaruit volgt dat $Ker(\varphi) = \{g \in G | g \in N_1, g \in N_2\} = N_1 \bigcap N_2$.

**c)** Uit $[G : N_1] = [G : N_2] = 2$ volgt dat $G/N_1 \times G/N_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De groep $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bevat precies drie ondergroepen van index twee. Het zijn de groepen $\{(\overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0})\}$, $\{(\overline{0}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{0})\}$ en $\{(\overline{1}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{0})\}$. Elk van deze drie groepen is isomorf met $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Omdat $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abels is zijn deze drie groepen normaaldelers van index twee.

Als de afbeelding $\varphi : G \longrightarrow G/N_1 \times G/N_2$ surjektief is, dan zijn de volledige originelen van de normaaldelers van index twee in $G/N_1 \times G/N_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ook weer normaaldelers van index twee in $G$. Dan hebben we drie normaaldelers van index twee in $G$. Minstens een verschilt van zowel $N_1$ als van $N_2$.

De surjektiviteit van de afbeelding $\varphi$ kunnen we aantonen door te gebruiken dat $N_1 \neq N_2$. Hieruit volgt dat er elementen $g_1$ en $g_2$ bestaan zodat $g_1 \in N_1, g_1 \notin N_2$ en $g_2 \in N_2, g_2 \notin N_1$. Dan $\varphi(g_1) = (\overline{1}, \overline{0})$, $\varphi(g_2) = (\overline{0}, \overline{1})$ en $\varphi(g_1g_2) = (\overline{1}, \overline{1})$. Aangezien $\varphi(e) = (\overline{0}, \overline{0})$, volgt nu dat de afbeelding $\varphi$ surjektief is.

Het is nu eenvoudig in te zien dat $N_3 = \varphi^{-1}(\{(\overline{1}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{0})\})$ de gevraagde normaaldeler is.

**opgave 3:** Zij $A$ een eindige abelse groep die voortgebracht wordt door de elementen $a, b$ en $c$. Er geldt onder andere dat $3a = 3b = 20c = 0$ en er is gegeven dat $A$ precies 45 elementen bevat.

a) Geef een isomorfisme van $A$ met een produkt van groepen van de vorm $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Geef een surjectief groepshomomorfisme $\varphi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow A$.

c) Bestaat er ook een surjectief groepshomomorfisme van $\mathbb{Z}^2$ naar $A$?

**oplossing:** **a)** Er geldt onder andere dat $3a = 3b = 20c = 0$. Uit het feit dat de orde van $A$ precies 45 is, kunnen we concluderen dat $A$ geen elementen van orde twee of vier bevat. Hieruit volgt dat zelfs $5c = 0$ geldt.

Nu kunnen we een isomorphisme van $\psi : A \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ maken door de beelden van de voortbrengers $a, b$ en $c$ te geven. We kiezen de beelden als volgt: $\psi(a) = (1 \ mod\ 3, 0 \ mod\ 3, 0 \ mod\ 5)$, $\psi(b) = (0 \ mod\ 3, 1 \ mod\ 3, 0 \ mod\ 5)$ en $\psi(c) = (0 \ mod\ 3, 0 \ mod\ 3, 1 \ mod\ 5)$. Duidelijk is dat $ord(a) = ord(\psi(a))$, $ord(b) = ord(\psi(b))$ en $ord(c) = ord(\psi(c))$. Omdat beide groepen abels zijn is de afbeelding $\psi$ een groepshomomorfisme. Omdat $\psi(a), \psi(b)$ en $\psi(c)$ voortbrengers zijn van $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ is de afbeelding surjektief. De groepen $A$ en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ hebben beide 45 elementen. Hieruit volgt dat $\psi$ inderdaad een isomorfisme $A \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ geeft.

Uit de chinese restelling volgt dat $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Dus er bestaat ook een isomofisme $A \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

**b)** De afbeelding $\varphi$ wordt gedefinieerd door een basis $e_1, e_2$ en $e_3$ van $\mathbb{Z}^3$ te kiezen en elk van deze elementen op een van de voorbrengers van $A$ af te beelden. Neem bijvoorbeeld $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ en $e_3 = (0, 0, 1)$. Definieer $\varphi$ door te stellen $\varphi(e_1) = a$, $\varphi(e_2) = b$ en $\varphi(e_3) = c$. Omdat zowel $\mathbb{Z}^3$ als $A$ abels zijn is dit een groepshomomorfisme. Het groepshomomorfisme $\varphi$ is surjectief omdat $a, b$ en $c$ voortbrengers zijn van $A$.

**c)** Omdat $A \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ kan $A$ ook voortgebracht worden door twee elementen. Bijvoorbeeld brengen de elementen $a$ en $b + c$ (er geldt $ord(b + c) = 15$) tezamen ook de abelse groep $A$ voort. Daaruit volgt dat er ook een surjektief groepshomomorfisme van $\mathbb{Z}^2$ naar $A$ bestaat.

**opgave 4:** Zij $G$ een eindige groep en zij $N \subset G$, $N \neq \{e\}$, een normaaldeler. De normaaldeler $N$ wordt voortgebracht door een element $x \in N$, d.w.z. dat $N = \{x^i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ met $n = ord(x) > 1$. Voor $g \in G$ definieren we $m_g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ als het kleinste niet-negatieve getal zodat geldt $gxg^{-1} = x^{m_g}$.

a) Stel $g \in G$ is een element van orde $ord(g) = k$. Bewijs dat $ggd(m_g, n) = 1$ en dat $(m_g)^k \equiv 1 \ mod\ n$.

b) Zij $\psi : G \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ de afbeelding gegeven door $\psi(g) = m_g \ mod\ n$. Bewijs dat $\psi$ goed gedefinieerd is en dat $\psi$ een groepshomomorfisme is.

c) Wanneer bevat $G$ een ondergroep $H$ met $H \supset N$ zodat $H$ isomorf is met de diedergroep $D_n$?

**oplossing: a)** Er geldt $ord\ (gxg^{-1}) = ord\ (x)$. Oftewel $ord\ (x^{m_g}) = ord\ (x)$. Hieruit volgt dat $ggd(m_g, n) = 1$

Uit $g^k = e$, volgt dat $x = exe = g^k x g^{-k} = (x^{m_g})^k = x^{m_g^k}$. Uit $x = x^{m_g^k}$ volgt dat $m_g^k \equiv 1 mod\ n$.

**b)** We hebben in onderdeel a) aangetoond dat $ggd(m_g, n) = 1$. Daaruit volgt dat $\psi(g) = m_g\ mod\ n$ goed gedefinieerd is.

Om aan te tonen dat het een groepshomomorfisme is kijken we naar $\varphi(gh)$ met $g, h \in G$. Uit $ghxh^{-1}g^{-1} = gx^{m_h}g^{-1} = (x^{m_h})^{m_g} = x^{m_h m_g}$, volgt dat $m_{gh} \equiv m_g m_h\ mod\ n$. Er geldt $\varphi(gh) = m_{gh}\ mod\ n = (m_g\ mod\ n) \cdot (m_h\ mod\ n) = \varphi(g)\varphi(h)$. Daarmee is aangetoond dat $\varphi$ een groepshomomorfisme is.

**c)** De diedergroep $D_n$ is de groep van isometrieën van de regelmatige $n$-hoek. Deze groep bevat $2n$ elementen en bevat een normaaldeler van orde $n$. Als $D_n \subset G$ dan mogen we deze normaaldeler gelijkstellen aan $N$.

De groep $D_n$ bevat een element $\tau$ van orde twee zodat $\tau x \tau^{-1} = x^{-1}$. Dus als $G$ een element $g$ bevat van orde twee zodat $m_g = n - 1$, dan bevat $G$ een ondergroep die isomorf is met de groep $D_n$.

*De beoordeling van het tentamen is als volgt: Voor alle onderdelen van de vragen een punt (dus drie per vraag). Het totaal wordt dan vermenigvuldigt met 3/4. Bij het resultaat hiervan wordt dan een punt opgeteld.*

*Als het cijfer van de toets hoger is dan dat van het tentamen, wordt het eindcijfer gegeven door twee derde maal het tentamencijfer plus een derde maal het toetscijfer.*